Scientific journal of the Fergana State University

Volume 1 *Scientific journal of the Fergana State University № 2/2018* Article 37

6-12-2018

A generalised spectral problem for the ordinary differential equation with discontinuous coefficient

A. URINOV,
Fergana state university, Ferghana, str,Murabbiylar 19, fdujournal@fdu.uz

F. FOZILOVA
fdujournal@mail.ru

ИЛМИЙ АХБОРОТ

УДК: 517.927

КОЭФФИЦИЕНТИ УЗИЛИШГА ЭГА БЎЛГАН ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН УМУМЛАШГАН СПЕКТРАЛ МАСАЛА
ОБОБЩЕННАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, КОЭФФИЦИЕНТ КОТОРОГО ИМЕЕТ СКАЧОК
A GENERALISED SPECTRAL PROBLEM FOR THE ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENT

А.Ўринов, Ф.Фозилова

Аннотация

Мақолада коэффициенти узилишга эга бўлган чизиқли оддий дифференциал тенглама учун иккинчи тур интеграл шартли умумлашган спектрал масала кўриб чиқилган. Ўрганилган масаланинг хос сонлари ва хос функциялари топилган.

Аннотация

В статье изучена обобщенная спектральная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения, коэффициент которого имеет скачок. Найдены собственные значения и собственные функции изучаемой задачи.

Annotation

In the article a generalised spectral problem with the second kind integral condition for the linear ordinary differential equation with discontinuous coefficient is investigated. Eigenvalues and eigenfunctions of the considered problem are found out.

Таянч сўз ва иборалар: *оддий дифференциал тенглама, улаш шартлари, хос сонлар, хос функциялар.*

Ключевые слова и выражения: *обыкновенное дифференциальное уравнение, условия соединения, собственные значения, собственные функции.*

Keywords and expressions: *ordinary differential equation, conjunction, conditions, eigenvalues, eigenfunctions.*

Бу мақолада қуйидаги умумлашган спектрал масала тадқиқ қилинади:

Масала. λ параметрнинг шундай қийматлари топилсинки,

$$sign\left(x-\frac{\pi}{2}\right)y''(x)=\lambda y(x), \qquad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right) \tag{1}$$

тенгламанинг $C[0,\pi]\cap C^1(0,\pi)$ синфга тегишли ва қуйидаги

$$\sqrt{|\lambda|}y(0)+y'(0)=0, \qquad y(\pi)+\sqrt{|\lambda|}\int\limits_{\pi/2}^{\pi}y(x)dx=0 \tag{2}$$

шартларни қаноатлантирувчи тривиалмас ечими мавжуд бўлсин.

(1) тенглама $(0,\pi)$ оралиқда иккита оддий дифференциал тенгламаларга ажрайди. Уларни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{cases}-y''(x)=\lambda y(x) & 0<x<\pi/2, & (3.1)\\ \ \ y''(x)=\lambda y(x) & \pi/2<x<\pi. & (3.2)\end{cases}$$

(3.1)-(3.2) тенгламаларнинг умумий ечимларини (2) шартларга бўйсундириб, изланаётган функция ва унинг биринчи тартибли ҳосиласи узлуксизлигини таъминлаш учун $y\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=y\left(\frac{\pi}{2}+0\right)$, $y'\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=y'\left(\frac{\pi}{2}+0\right)$ “улаш шартлари”дан фойдаланиб, қуйидаги системага эга бўламиз:

А.Ўринов *– ФарДУ, физика-математика фанлари доктори, профессор.*

Ф.Фозилова *– ФарДУ физика-математика факультети математика ўқитиш методикаси йўналиши 3-курс талабаси.*

$$\begin{cases} \sqrt{|\lambda|}\varphi(0,\lambda)+\varphi'(0,\lambda)=0, \\ \psi(\pi,\lambda)+\sqrt{|\lambda|}\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\psi(x)dx=0, \\ \varphi(\pi/2,\lambda)=\psi(\pi/2,\lambda), \\ \varphi'(\pi/2,\lambda)=\psi'(\pi/2,\lambda). \end{cases} \tag{4}$$

Бу ерда $\varphi(x,\lambda)$ ва $\psi(x,\lambda)$ – мос равишда (3.1) ва (3.2) тенгламаларнинг умумий ечими бўлиб, қуйидаги кўринишга эга:

$$\varphi(x,\lambda)=\begin{cases} c_1ch\left(\sqrt{-\lambda}x\right)+c_2sh\left(\sqrt{-\lambda}x\right), & \lambda<0, \\ c_1+c_2x, & \lambda=0, \\ c_1\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)+c_2\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right), & \lambda>0 \end{cases} \tag{5}$$

$$\psi(x,\lambda)=\begin{cases} c_3\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right)+c_4\sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right), & \lambda<0, \\ c_3+c_4x, & \lambda=0, \\ c_3ch\left(\sqrt{\lambda}x\right)+c_4sh\left(\sqrt{\lambda}x\right), & \lambda>0, \end{cases} \tag{6}$$

c_1, c_2 c_3, c_4 -ихтиёрий ўзгармаслар.

(5) ва (6) тенгликларни эътиборга олиб (4) системани $\lambda<0$, $\lambda=0$, $\lambda>0$ бўлган ҳоллар учун алоҳида-алоҳида тадқиқ қиламиз.

1) $\lambda<0$ бўлсин. У ҳолда (4) дан қуйидагича системага эга бўламиз:

$$\begin{cases} c_1+c_2=0, \\ \left[\cos\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right)+\sin\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right)-\sin\left(\sqrt{-\lambda}\pi/2\right)\right]c_3+ \\ +\left[\sin\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right)-\cos\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right)+\cos\left(\sqrt{-\lambda}\pi/2\right)\right]c_4=0, \\ ch\left(\sqrt{-\lambda}\pi/2\right)c_1+sh\left(\sqrt{-\lambda}\pi/2\right)c_2-\cos\left(\sqrt{-\lambda}\pi/2\right)c_3-\sin\left(\sqrt{-\lambda}\pi/2\right)c_4=0, \\ sh\left(\sqrt{-\lambda}\pi/2\right)c_1+ch\left(\sqrt{-\lambda}\pi/2\right)c_2+\sin\left(\sqrt{-\lambda}\pi/2\right)c_3-\cos\left(\sqrt{-\lambda}\pi/2\right)c_4=0. \end{cases} \tag{5}$$

Бу система тривиал бўлмаган ечимларга эга бўлиши учун унинг асосий детерминанти нолга тенг бўлиши зарур. Асосий детерминантни нолга тенглаш орқали қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$\left[ch\left(\sqrt{-\lambda}\pi/2\right)-sh\left(\sqrt{-\lambda}\pi/2\right)\right]\left[1-2\cos\left(\sqrt{-\lambda}\pi/2\right)\right]=0.$$

Ушбу тенгликда $\left[ch\left(\sqrt{-\lambda}\pi/2\right)-sh\left(\sqrt{-\lambda}\pi/2\right)\right]=e^{-\sqrt{-\lambda}\pi/2}\neq0$ эканлигидан $\cos\left(\sqrt{-\lambda}\pi/2\right)=1/2$ тенгламага келамиз. Бундан $\lambda_n^{(1)}=-|4n-2/3|^2$, $n\in Z$ хос сонларга эга бўламиз. (5) Системада λ нинг ўрнига $\lambda_n^{(1)}$ ни қўйиб, c_1, c_2, c_3 ларни топамиз: $c_1=-c_2=\left(1+\sqrt{3}\right)e^{(2n-1/3)\pi}c_4$, ва $c_3=\left(2+\sqrt{3}\right)c_4$ ечимларга эга бўламиз. Буларни эътиборга олиб, $c_4=a_n\neq0$ деб олсак, у ҳолда $\lambda_n^{(1)}$ хос сонларга мос хос функциялар қуйидагича аниқланади:

$$y_n^{(1)}(x)=\begin{cases}\left(1+\sqrt{3}\right)a_n e^{(2/3-4n)[x-\pi/2]}, & 0\le x\le(\pi/2),\\ a_n\left[\left(2+\sqrt{3}\right)\cos(4n-2/3)x+\sin(4n-2/3)x\right], & (\pi/2)\le x\le\pi.\end{cases}$$

2) $\lambda=0$ – масаланинг хос сони эмаслигини кўрсатиш қийин эмас.

3) $\lambda>0$ бўлсин. Бунда (4) дан қуйидаги системага зга бўламиз:

$$\begin{cases} c_1+c_2=0,\\ c_3\left[ch\left(\sqrt{\lambda}\pi\right)+sh\left(\sqrt{\lambda}\pi\right)-sh\left(\sqrt{\lambda}\pi/2\right)\right]+c_4\left[sh\left(\sqrt{\lambda}\pi\right)+ch\left(\sqrt{\lambda}\pi\right)-ch\left(\sqrt{\lambda}\pi/2\right)\right]=0,\\ c_1\cos\left(\sqrt{\lambda}\pi/2\right)+c_2\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi/2\right)-c_3ch\left(\sqrt{\lambda}\pi/2\right)-c_4sh\left(\sqrt{\lambda}\pi/2\right)=0,\\ \sqrt{\lambda}\left[-c_1\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi/2\right)+c_2\cos\left(\sqrt{\lambda}\pi/2\right)-c_3sh\left(\sqrt{\lambda}\pi/2\right)-c_4ch\left(\sqrt{\lambda}\pi/2\right)\right]=0.\end{cases} \tag{6}$$

Бу система тривиал бўлмаган ечимларга эга бўлиши учун унинг асосий детерминанти нолга тенг бўлиши зарур, бундан қуйидаги тенгламага келамиз:

$$2e^{\sqrt{\lambda}\pi/2}=ctg\left(\sqrt{\lambda}\pi/2\right)+1 \tag{7}$$

Бу тенгликдан λ ни ошкор кўринишда топиб бўлмайди. Лекин (7) тенглама $+\infty$ га интилувчи саноқли сондаги $\lambda_n^{(2)}$ ечимларга эга бўлиб, у ечим-лар $\sqrt{\lambda_n^{(2)}}(\pi/2)\in\left(k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k=0,1,2,\ldots$ шартни қаноатлантиради. (6) системда λ нинг ўрнига $\lambda_n^{(2)}$ ни қўйиб, c_2, c_3, c_4 ларни топамиз:

$$c_2=-c_1,\; c_3=\left[\cos\left(\sqrt{\lambda_n^{(2)}}\pi/2\right)e^{-\sqrt{\lambda_n^{(2)}}\pi/2}-\sin\left(\sqrt{\lambda_n^{(2)}}\pi/2\right)e^{\sqrt{\lambda_n^{(2)}}\pi/2}\right]c_1 \quad \text{ва}$$

$$c_4=\left[\cos\left(\sqrt{\lambda_n^{(2)}}\pi/2\right)e^{-\sqrt{\lambda_n^{(2)}}\pi/2}+\sin\left(\sqrt{\lambda_n^{(2)}}\pi/2\right)e^{\sqrt{\lambda_n^{(2)}}\pi/2}\right]c_1.$$

Тривиал бўлмаган ечим излаётганимиз учун $c_1=a_n\neq0$, $n\in\mathrm{N}$ деб оламиз, у ҳолда $\lambda_n^{(2)}$ хос сонларга мос хос функциялар қуйидагича аниқланади:

$$y_n^{(2)}(x)=\begin{cases} a_n\left[\cos\left(\sqrt{\lambda_n^{(2)}}x\right)-\sin\left(\sqrt{\lambda_n^{(2)}}x\right)\right], & 0\le x\le(\pi/2),\\ a_n\left[\cos\left(\sqrt{\lambda_n^{(2)}}\pi/2\right)e^{\sqrt{\lambda_n^{(2)}}(x-\pi/2)}-\sin\left(\sqrt{\lambda_n^{(2)}}\pi/2\right)e^{-\sqrt{\lambda_n^{(2)}}(x-\pi/2)}\right], & (\pi/2)\le x\le\pi.\end{cases}$$

Шундай қилиб масала тўла ҳал этилди.

References:

1. O'rinov A.Q. Oddiy differentsial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar. – T.: Mumtoz so'z , 2014.
2. Salohitdinov M.S., Nasritdinov G'.N. Oddiy differentsial tenglamalar. – T.: O'zbekiston, 1994.